

# QED 1-7

Matematikk for  
grunnskolelærerutdanningen

*Bind 2*

Vurdering av matematikkapper

*Av Nils Henry Rasmussen*

# Innhold

<b>1</b>	<b>Innledning</b> .....	3
<b>2</b>	<b>Utvikling av matematisk forståelse</b> .....	3
2.1	Begrepsforståelse .....	3
2.2	Lekseforskning .....	4
<b>3</b>	<b>Eksempler på noen apper og en vurdering av disse</b> .....	6
3.1	«Slice It!».....	6
3.2	«Einstein Math Academy – Brain Gaming» .....	7
3.3	«Barn Math Challenge Space» .....	9
3.4	«Math Race» .....	11
<b>4</b>	<b>Kilder</b> .....	13

# 1 Innledning

I denne teksten skal vi se på hvordan man kan vurdere de mange ulike matematikkappene som er kommet på markedet. Som matematikklærer er det gjerne forventet at du kan gjøre deg opp en formening om et bestemt matematikkspill for smarttelefon eller nettbrett vil kunne hjelpe en elev å utvikle seg i faget. Men for at du skal kunne gjøre en faglig vurdering av dette, er det nødvendig å være bevisst på hvilke kriterier som skal ligge til grunn, og på hvilket grunnlag man skal kunne avgjøre om en bestemt app vil kunne gi et godt læringsutbytte for eleven.

Å utvikle matematisk forståelse handler først og fremst om å utvikle forståelse av de begreper som anvendes. Det vil derfor være nødvendig å se på hva læringsteorien sier om utvikling av begrepsforståelse. Når man studerer læringsutbytte, kan det være interessant å se på hva forskning på lekser sier om læringsutbyttet av ulike typer matematikkoppgaver.

## 2 Utvikling av matematisk forståelse

### 2.1 Begrepsforståelse

Matematikk er bygget opp av begreper. Eksempler på begreper er brøk, multiplikasjon, desimaltall, søylediagram og areal. Noen begreper er enklere enn andre. Antallsbegrepet (hva det betyr å si at «det er 5 epler på bordet») er noe man lærer i barnehagealder, mens funksjonsbegrepet er noe man lærer på ungdomsskolen.

Ifølge Skemp (1989) vil en elev normalt bygge opp forståelse av et begrep ved å bli presentert for flere ulike eksempler. Et barnehagebarn vil forstå begrepet *trekant* ved å bli presentert for mange ulike versjoner av en trekant, og en ungdomsskoleelev vil forstå hva *graf* er, ved å bli presentert for flere eksempler på plotting av punkter av ulike funksjoner inn i et koordinatsystem.

Denne måten å bygge opp begrepsforståelse på kan lede til ulike grader av forståelse. Det er klart at en gjennomsnittlig ungdomsskoleelev som har forstått funksjonsbegrepet, vil ha en lavere grad av forståelse enn hva læreren har. Vi kan gjerne si at læreren har en *dypere* begrepsforståelse enn elevene. Dette kommer av at læreren har arbeidet med dette i flere år, og dessuten har anvendt funksjonsbegrepet på en rekke ulike områder som gjør at forståelsen «sitter» mye bedre.

Men hva vil dette egentlig si? Har ikke elevene forstått begrepet allikevel? Eller kan man snakke om grader av forståelse?

Sfard (1991) har lansert en annen måte å se denne forskjellen på og definerer to duale former for forståelse: *operasjonell* og *strukturell* forståelse av et begrep. Forskjellen på disse to måtene å forstå et begrep på, er at den operasjonelle forståelsen baserer seg på operasjoner, eller noe man «gjør», på andre matematiske objekter. F.eks. vil en ungdomsskoleelev betrakte grafen til en funksjon som «det å regne ut  $y$ -verdien for en

rekke  $x$ -verdier, plotte punktene og trekke en kurve gjennom dem».

Den strukturelle forståelsen handler om å betrakte begrepet som et abstrakt objekt som har en rekke tilhørende egenskaper. Læreren som ser funksjonsuttrykket  $y = 3x + 2$ , vil se for seg ei linje med stigningstall 3 som krysser  $y$ -aksen i 2. Det å sette opp  $x, y$ -tabellen og plotte punkter inn i koordinatsystemet er blitt gjort så ofte at læreren ikke trenger å gjøre dette lenger. Denne måten å tenke på regnes som detaljer som er underordnet det større bildet, nemlig hvordan lineære funksjoner står i 1–1-korrespondanse med funksjonsuttrykk på formen  $y = ax + b$ , der  $a$  og  $b$  er reelle tall.

Sfard forklarer hvordan man kan komme fra operasjonell til strukturell forståelse av et begrep gjennom gjentatt drill av en rekke operasjoner som anvender begrepet. Et veldig godt eksempel på hvordan slik drill kan styrke forståelsen, er måten barnehagebarn lærer seg antallsforståelsen på gjennom gang på gang på gang å terpe på telleramsen og en haug av eksempler på mengder av objekter.

Hvis du spør et barn som nettopp har lært seg telleramsen og pardannelse (det å peke på objektene i takt med at man teller oppover), om f.eks. hvor mange epler det er på bordet, vil barnet begynne å peke på ett og ett eple og si høyt «1, 2, 3, 4, ...». Barnet har her en operasjonell forståelse av antallsbegrepet. Det å finne ut hvor mange epler det er på bordet, involverer å gjøre noe med disse eplene, nemlig å telle dem. Og barnet vil gjerne tro at svaret kan bli annerledes hvis han/hun teller i en annen rekkefølge.

Dette barnet vil nå gå gjennom et par år med drill av antallsbegrepet kamuflert gjennom barneregler, sanger og lek. Og etter en stund vil dette barnet plutselig få opp øynene for hva det vil si at «det er 5 epler på bordet». Antallet epler er helt uavhengig av selve operasjonen å telle eplene. Antallet epler (5) er faktisk en egenskap ved denne mengden epler, og har ingenting med barnets observasjoner å gjøre.

Sfard argumenterer for at de fleste mennesker som lærer matematiske begreper, vil begynne med en operasjonell tilnærming til begrepet før en strukturell forståelse kan oppnås. Vi ser gjennom beskrivelsen av denne utviklingen hvordan mye øvelse og trening har en sentral rolle i læringsprosessen.

Men har det noe å si hva denne øvelsen og treningen går ut på? Det skal vi se nærmere på i neste delkapittel.

## 2.2 Lekseforskning

Vi har funnet det naturlig å bringe inn forskning på hva slags lekser som gir godt læringsutbytte for elevene, som et grunnlag for å diskutere matematikkappers potensielle læringseffekt for barna. Grunnen til dette er at matematikkapper er noe barna som regel vil holde på med uten mye veiledning fra lærer (f.eks. på fritiden eller som del av stasjonsundervisning), og dermed får man mye av den samme problemstillingen som er relatert til læring på egen hånd. Det kan handle om hvordan oppgaver preget av drill kan forsterke misoppfatninger, og om de positive effektene av ferdighetstrening og

automatisering.

Trautwein mfl. (2002) har gjort en undersøkelse blant nesten 2000 tyske 7.-klassinger om effekten lekser har på elevenes matematikkmestring, og har bl.a. funnet at oppgaver som stimulerer elevene til å tenke, har en positiv innvirkning på læringsutbyttet. Leksene kunne f.eks. være forberedelser til ny teori som skulle gjennomgås, eller det kunne være ulike former for oppfriskning av gammel teori.

I den motsatte enden av skalaen fant man store mengder oppgaver som bar preg av drill. Her var det totale læringsutbyttet dårlig, men man fant et positivt utbytte hos de lavt presterende elevene. De som tapte mest på denne typen lekser, var de høyt presterende.

Forskerne skriver i sin artikkel at en mulig årsak til det lave læringsutbyttet man finner ved bruk av denne typen lekser, er at eventuelle misoppfatninger kan bli styrket når man arbeider med store mengder av denne typen oppgaver uten veiledning fra lærer eller foreldre.

Man finner i Bell (1993) resultater som viser at læringsutbyttet øker når man får umiddelbar respons på om man har løst en oppgave riktig eller galt. Dette kan være med på å understøtte forskernes kommentarer om styrking av mulige misoppfatninger. Hvis det går for lang tid før en elev får tilbakemelding på en oppgave, kan eleven ha glemt oppgaveformuleringen og hvordan han/hun løste oppgaven, og læringseffekten kan slik bli redusert.

Det kan tenkes at en del av dette problemet ikke blir like aktuelt for vårt vedkommende, i og med at de fleste matematikkapper gir en umiddelbar tilbakemelding på brukerens prestasjon. Men på den annen side kan det eksistere misoppfatninger hvor man i flere tilfeller får ut riktig tallsvar. Et eksempel er sammenligningsoppgaver med desimaltall. Det finnes et rikt utvalg av ulike misoppfatninger innenfor desimaltall (se f.eks. kapittel 2.5 i Steinle (2004)), og en utbredt misoppfatning er at tall som 3,678 er større enn 3,7 fordi  $678 > 7$ . I en tenkt situasjon der en matematikkapp ber brukeren om å sammenligne par av desimaltall der det alltid er likt antall desimaler bak kommaet, vil en elev med nevnte misoppfatning få riktig svar på samtlige oppgaver, og således kan denne elevens misoppfatning bli styrket fordi han/hun gjennom denne appen får en feilaktig bekreftelse på at hans/hennes forståelse er riktig.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Merk at det som sagt er mange andre måter å misforstå desimaltall på. Steinles egen forskning viser f.eks. en utbredt misoppfatning også om det motsatte, nemlig at færre desimaler gjør tallet større. Dette kan ha bakgrunn i bl.a. en misoppfatning om at fordi desimaldelen av 3,678 kan skrives som en brøk med 1000-deler, må dette tallet være mindre enn 3,45, hvor desimaldelen kan skrives som en brøk med 100-deler.

### 3 Eksempler på noen apper og en vurdering av disse

I dette kapittelet vil vi gi noen eksempler på matematikkapper og vise hvordan man kan foreta en vurdering av disse på bakgrunn av momentene vi trakk fram i kapittel 2.

#### 3.1 «Slice It!»

**Beskrivelse:** Denne appen er tilgjengelig for produkter som bruker iOS eller Android, og kan både brukes på mobiltelefon og nettbrett. Android-versjonen er gratis, men iOS-versjonen koster 99 cent. Den er tilgjengelig på bl.a. Google Play.

Konseptet går ut på at man får gitt en geometrisk figur som er delt inn i et gitt antall biter (f.eks. en sirkel delt inn i åtte biter, eller en 7-kant som er delt inn i fem biter). Utfordringen er å trekke et gitt antall rette linjer gjennom denne figuren slik at den blir delt inn i et gitt antall flere biter. Antall linjer man skal trekke, varierer fra brett til brett, og antall biter figuren skal være delt inn i, varierer også.



Utfordringen er å dele figuren opp slik at arealene av stykkene er like (kun arealene – stykkene trenger ikke være like i form), og slik at man bruker akkurat det antall linjer som er gitt.

De første brettene kan være ganske greie, men vanskelighetsgraden stiger raskt. Ofte er utfordringen å klare å tenke ukonvensjonelt, og arealene av stykkene kan ofte være annerledes enn hva man skulle tro. Dette gjør det også vanskelig å gjette seg fram til hvor linjene egentlig skal gå.

Det finnes to versjoner av spillet: én som ikke går på tid, og der man gradvis får en økning i vanskelighetsgraden, og én der man skal klare flest mulig brett på ett minutt. I sistnevnte versjon får man bonustid hvis man klarer et brett, men får en tilsvarende avkorting i tid hvis man plasserer linjene feil.

**Vurdering:** Når man skal vurdere en slik applikasjon, kan man både vurdere spillet etter hvor bra det er som spill, og etter hvor bra det er til å utvikle matematiske ferdigheter. Førstnevnte er allerede blitt gjort på en rekke nettsider. Spillet har fått positiv omtale for underholdningsverdien. Det er enkelt å bruke, det tar ikke i bruk unødvendige effekter, det er utfordrende, og det trekkes gjerne fram at spilleren får anledning til å bruke den tiden han/hun trenger på å tenke seg om. På den måten ligger utfordringen i det intellektuelle, og ikke i hvor rask du er til å trykke på knappene.

Det kan nevnes at spillet kom på første plass på «Best App Ever Awards» i 2011 under kategorien «Best Casual Game» i Android-klassen (se <http://bestapp-ever.com/awards/2011/winner/cagm>).

Matematikken spilleren møter gjennom denne appen, vil ikke bli karakterisert som avansert. Det er egentlig kun ett begrep elevene her får innprentet, og det er *areal*. På den annen side vil man over tid gjennom dette spillet bygge opp en god begrepsforståelse for hva areal er. To figurer kan nemlig ha samme flateinnhold uten å være av samme form, og noen ganger vil det gjerne stride mot intuisjonen at linjene faktisk deler figuren inn i like store biter. Og en slik forståelse av arealbegrepet kan det være verdt å få med seg.

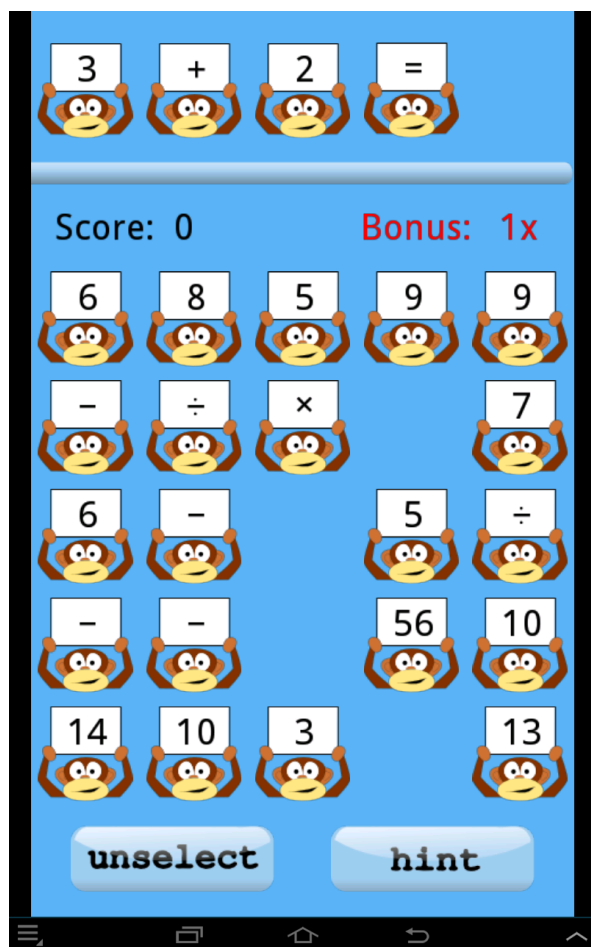
I forrige kapittel nevnte vi også verdien av å gi elever oppgaver som får dem til å tenke. Dette spillet kan på en måte komme inn under denne kategorien. Selv om matematikken ikke er avansert, vil man allikevel få trent opp matematiske evner i spillet. Man bygger på sikt opp en erfaring rundt hvordan utfordrende oppgaver kan angripes, og man blir etter hvert vant til å forkaste strategier som viser seg å ikke virke, og bygge opp nye.

### 3.2 «Einstein Math Academy – Brain Gaming»

**Beskrivelse:** Denne appen er tilgjengelig for Android-produkter. Applikasjonen er gratis og tilgjengelig på bl.a. Google Play.

Man får oppgitt et 5×5-rutenett med tall, plusstegn, minustegn, gangetegn og deletegn. Sammensettingen er avhengig av hvilket vanskelighetsnivå man har valgt på forhånd («Toddler», 1. klasse, 2. klasse, 3. klasse, 4. klasse, «Quick» eller «Survival»). Man skal så sette sammen ulike symboler slik at man får opp et riktig matematikkstykke. Hvis man f.eks. setter sammen «7», «X» og «6», så kommer man ingen vei hvis ikke rutenettet også har en rute med «42». Altså må man passe på at de stykkene man setter sammen, også har et svar som befinner seg i samme rutenett.

Når man har brukt noen av symbolene, erstattes disse av nye symboler.



Man får poeng for hvert riktige stykke man har klart å sette sammen. Ett av tallene som er brukt, havner tilbake i rutenettet med en spesiell farge på seg, og hvis man klarer å bruke dette tallet i neste matematikkstykke, vanker det bonuspoeng. Hvis man klarer å bruke slike fargede tall flere ganger på rad, økes bonuspoengene.

Et irriterende moment at det ikke alltid er mulig å sette sammen matematikkstykker der man bruker de fargede tallene. Det finnes faktisk også tilfeller der man ikke kan sette sammen noen matematikkstykker i det hele tatt, og da kommer meldingen «Stuck» opp på skjermen, og spillet er over. Dette er ikke brukerens feil, og det kan være en ulempe hvis man ønsker å bygge opp motivasjon hos elever.

I «Quick»-versjonen av spillet skal man prøve å sette sammen så mange matematikkstykker som mulig på ett minutt. Her er det flere tosifrede tall som er med, og den korte tiden man har til rådighet, øker stressnivået betraktelig. Det er sjelden at man klarer å sette sammen mer enn fire matematikkstykker før tiden er ute.

«Survival»-versjonen er ment for dem som synes «Quick»-versjonen gir for mye tid til rådighet. Her har man hele 15 sekunder på seg for å klare å sette sammen så mange matematikkstykker som mulig.



**Vurdering:** Dette spillet ligner mer på drill enn det som er tilfelle med «Slice It!» (som vi vurderte i kapittel 3.1). Her blir spilleren trent opp i å mestre de fire regneartene, og jo mer det «sitter», jo flere poeng vil spilleren få. Dette spillet kan dermed være et eksempel på oppgavearbeid som ifølge forskningen gjengitt i kapittel 2.2 vil kunne gagne lavt presterende elever. Her får man hjelp til å automatisere grunnleggende regneferdigheter, noe som er viktig for å kunne klare mer krevende matematikk. I kapittel 2.1 diskuterte vi det sentrale i å ha det grunnleggende på plass.

Oppgavene er lagt opp på en måte som tvinger barna til å tenke i flere alternative former. Dette er ikke ensporede oppgaver, men et hav av forskjellige alternativer, og man må vite hvor man skal begynne. Hvis man er glad i addisjon fordi det er enkelt, vil man allikevel bli tvunget til å benytte de tre andre regneartene hvis addisjonsstykkene er brukt opp.

Man kan i dette spillet velge om man ønsker å spille på tid eller ikke. Dette åpner for at barn som trenger tid til å tenke seg om, vil få den muligheten, samtidig som «Quick»- og «Survival»-versjonene innbyr til konkurranse mellom de mer drevne.

### 3.3 «Barn Math Challenge Space»

**Beskrivelse:** Denne appen er tilgjengelig for Android-produkter på Google Play og er gratis.

Dette er et spill for 2 til 4 spillere. Hver spiller sitter på sin side av nettbrettet, og på 30 sekunder skal man løse så mange matematikkstykker som mulig. Man velger på forhånd om man ønsker addisjon, subtraksjon, multiplikasjon eller divisjon.

Det finnes to versjoner av spillet. I den ene versjonen (Family Challenge) registrerer hver spiller om han/hun er barn eller voksen. De voksne spillerne får matematikkstykker som er langt vanskeligere enn de barna får, og på den måten gjør man spillet mer rettferdig. Man kan her også registrere vanskelighetsnivå, men dette har faktisk ingen innvirkning på denne versjonen av spillet. Her ligger vanskelighetsnivået for barna på enkel addisjon og subtraksjon, og øving på multiplikasjonstabellen.

I denne versjonen fungerer spillet slik: Alle barn får samme matematikkstykke foran seg, og med fire forskjellige svaralternativer. Tilsvarende får alle de voksne også samme matematikkstykke foran seg, og der også med fire svaralternativer. Det er om å gjøre å være den første til å svare, og hvis man er for sent ute, får man ingen poeng. Den som svarer først, får 10 poeng hvis svaret er riktig, og -10 poeng hvis svaret er feil.



I den andre versjonen (Maths Challenge) velger man bare vanskelighetsgrad, og så får alle spillerne de samme matematikkstykkene uavhengig av om de er voksne eller barn. Her har vanskelighetsgraden faktisk en innvirkning, men ingen av dem passer for småskolen, siden addisjonsstykkene ofte har negativt svar. De vanskeligere nivåene passer for ungdomsskolen.

**Vurdering:** Dette spillet er også stort sett preget av drill, og det sentrale her er å være raskere til å svare enn motspilleren. Dette spillet kunne vært ekskluderende for lavt presterende elever – som vi har sett er den målgruppen som har mest å tjene på denne typen spill – hvis det ikke hadde vært for spillversjonen der man kan spille mot voksne som får langt vanskeligere oppgaver. Akkurat den spillversjonen virker interessant, og det kan tenkes at det kan være motiverende for et barn med behov for økt ferdighetstrening f.eks. å spille dette spillet sammen med foreldrene sine.

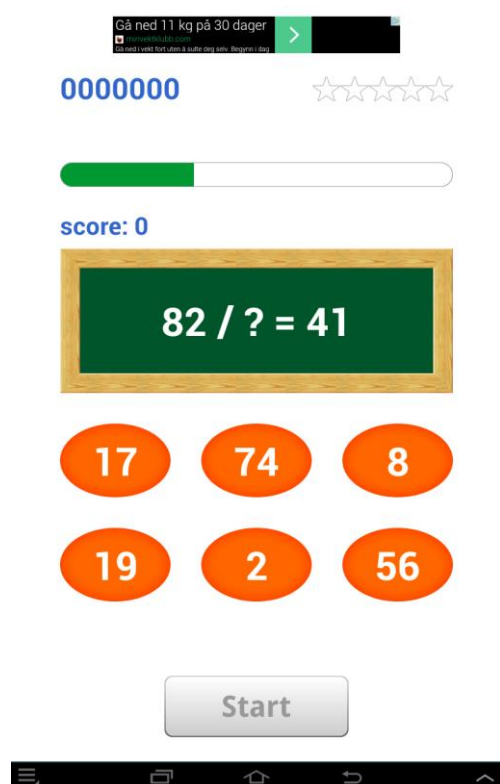
Den andre spillversjonen kan virke for utfordrende og demotiverende på elever som trenger lengre tenketid enn andre. Høyt presterende elever kan få sitt konkurranseinstinkt pirret av å risikere å tape for medelever, og de vil sannsynligvis finne applikasjonen svært underholdende, men denne elevgruppen vil på den annen side sannsynligvis ha lite å vinne ferdighetsmessig på å spille dette spillet.

### 3.4 «Math Race»

Helt til slutt i dette kapitlet tar vi en titt på en applikasjon som etter vår mening i enda større grad risikerer å treffe feil målgruppe. Akkurat denne applikasjonen er kun tilgjengelig for Samsung-produkter, men vi føler at den er et godt eksempel på hvordan et tilsynelatende bra spill kun gagnar de elevene som trenger det minst.

**Beskrivelse:** Denne appen er tilgjengelig for Samsung-produkter. Applikasjonen er gratis.

Du har 45 sekunder på deg til å svare på så mange matematikkstykker som mulig, ved å velge fra seks svaralternativer. Du får poeng for hvert riktige svar, men du mister poeng tilsvarende det du kan få for en halv oppgave, hvis du svarer feil.



Det finnes fem vanskelighetsgrader. Den laveste baserer seg på enkle stykker i alle de fire regneartene, f.eks.  $5 + 4 = ?$  eller  $10 : ? = 2$ . Den høyeste vanskelighetsgraden inkluderer regning med parenteser og store tall, og kan passe for ungdomsskoleelever som trenger å øve seg på hoderegning.

Man får mer poeng for oppgavene på høyt vanskelighetsnivå enn lavt, så man tjener på å prøve seg på de vanskelige oppgavene.

**Vurdering:** I denne applikasjonen er belønningssystemet til stede, utfordringen er der, og den gir verdifull trening i grunnleggende ferdigheter som man får behov for senere i skolematematikken.

Problemet er bare at spillet kanskje mangler en innpakning som gjør det mer spennende for

de elevene som trenger det mest. Det er nettopp de lavt presterende elevene som ikke synes det er så veldig spennende å terpe på matematikkstykker som til forveksling ligner på helt standard lekser. Og det er akkurat den gruppen elever som har mest å vinne på drill, slik vi diskuterte i kapittel 2.2.

I den andre enden av skalaen finner vi høyt presterende elever som kan få stimulert konkurranseinstinktet sitt gjennom å sammenligne poeng og føle stressfølelsen bygge seg opp etter hvert som tiden renner ut.

## 4 Kilder

- Bell, A. (1993). Prinsipper for utforming av undervisning (Principles for the design of teaching). Oversatt av Dan Roaldsøy. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 5–34.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1–36.
- Skemp, R. (1989). *Mathematics in the Primary School*. London: Routledge.
- Steinle, V. (2004). *Changes with age in students' misconceptions of decimal numbers*. Melbourne: University of Melbourne, Department of Science and Mathematics Education.
- Trautwein, U., Köller, O., Schmitz, B., & Baumert, J. (2002). Do homework assignments enhance achievement? A multilevel analysis in 7th-grade mathematics. *Contemporary Educational Psychology*, 27(1), 26–50.